多项式简介

史记

2017 年 8 月 10 日

系数表示法

定义 n 次多项式为 $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

a 是这个多项式的系数数组

最常用的表示多项式的方法就是用系数数组表示

多项式的基本运算

令 A 和 B 为两个 n 次多项式

加减： $(A \pm B)(x) = A(x) \pm B(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i \pm b_i)x^i$

乘法： $(A \times B)(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}$

多项式的点值表示法

定理

已知平面上 n 个横坐标不同的点，则有且仅有 1 个 n-1 次多项式经过这 n 个点。

多项式的点值表示法

定理

已知平面上 n 个横坐标不同的点，则有且仅有 1 个 n-1 次多项式经过这 n 个点。

于是就有了另一种表示多项式的方法：用多项式曲线上 n-1 个点的坐标表示

点值表示法与系数表示法的转换

- 系数表示法-> 点值表示法:
  随便取 $n+1$ 个不同的数作为横坐标代进去

点值表示法与系数表示法的转换

- 系数表示法-> 点值表示法：
  随便取 n+1 个不同的数作为横坐标代进去
- 点值表示法-> 系数表示法：
  称为插值
  常用算法是拉格朗日插值法，后面会介绍

点值表示法下的基本运算

设插值所用的横坐标为 $x_0, x_1, ...x_n$

L 表示插值函数

$A(x) = L(A(x_0), A(x_1), ..., A(x_n)), B(x) = L(B(x_0), B(x_1), ..., B(x_n))$

点值表示法下的基本运算

设插值所用的横坐标为 $x_0, x_1, ...x_n$

L 表示插值函数

$A(x) = L(A(x_0), A(x_1), ..., A(x_n)), B(x) = L(B(x_0), B(x_1), ..., B(x_n))$

加减：$(A \pm B)(x) = L((A \pm B)(x_0), (A \pm B)(x_1), ..., (A \pm B)(x_n)) = L(A(x_0) \pm B(x_0), A(x_1) \pm B(x_1), ..., A(x_n) \pm B(x_n))$

点值表示法下的基本运算

设插值所用的横坐标为 $x_0, x_1, ...x_n$

L 表示插值函数

$A(x) = L(A(x_0), A(x_1), ..., A(x_n)), B(x) = L(B(x_0), B(x_1), ..., B(x_n))$

加减：$(A \pm B)(x) = L((A \pm B)(x_0), (A \pm B)(x_1), ..., (A \pm B)(x_n)) = L(A(x_0) \pm B(x_0), A(x_1) \pm B(x_1), ..., A(x_n) \pm B(x_n))$

乘法：$(A \times B)(x) = L((A \times B)(x_0), (A \times B)(x_1), ...(A \times B)(x_n)) = L(A(x_0) \times B(x_0), A(x_1) \times B(x_1), ..., A(x_n) \times B(x_n))$

快速傅立叶变换

FFT 可以在 $O(nlogn)$ 的时间复杂度内将多项式在系数表示法和点值表示法之间转换，但是点值表示法的点的横坐标必须是特定的几个点

这些点的横坐标是 $\omega_n^1, \omega_n^2, ...\omega_n^n$

ω_n 是复数，表示 n 次单位根

FFT 的过程这里不深入探究

如果要计算两个系数表示的多项式的乘积的系数表示，就可以先转换成点值表示，然后相乘，再插值回去

拉格朗日插值

FFT 只能从特定的横坐标插值，如果想要从任意点插值，就要使用拉格朗日插值法了

拉格朗日插值

FFT 只能从特定的横坐标插值，如果想要从任意点插值，就要使用拉格朗日插值法了

设已知 n+1 个点为 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

假设我们找到了 n+1 个函数 $c_i(x)$ 满足 $c_i(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_j, i \neq j \end{cases}$

拉格朗日插值

FFT 只能从特定的横坐标插值，如果想要从任意点插值，就要使用拉格朗日插值法了

设已知 n+1 个点为 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

假设我们找到了 n+1 个函数 $c_i(x)$ 满足 $c_i(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_j, i \neq j \end{cases}$

那么插值出的函数可以表示成

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i(x) y_i = c_0(x) y_0 + c_1(x) y_1 + \ldots + c_n(x) y_n$$

拉格朗日插值

FFT 只能从特定的横坐标插值，如果想要从任意点插值，就要使用拉格朗日插值法了

设已知 n+1 个点为 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

假设我们找到了 n+1 个函数 $c_i(x)$ 满足 $c_i(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_j, i \neq j \end{cases}$

那么插值出的函数可以表示成

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i(x) y_i = c_0(x) y_0 + c_1(x) y_1 + \ldots + c_n(x) y_n$$

$$c_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

拉格朗日插值

如何求 $\prod_{j \neq i}(x - x_j)$

分治 +FFT: $O(n^2 log^2 n)$

拉格朗日插值

如何求 $\prod_{j\neq i}(x - x_j)$

分治 +FFT: $O(n^2 log^2 n)$

如果不需求多项式的系数，只是要求多项式在某点的值 F(t)

那只要求 $\prod_{j\neq i}(t - x_j)$

可以 $O(n)$ 预处理前缀积和后缀积，然后就可以求出每个 j 的 $\prod_{j\neq i}(t - x_j)$

如果插值点的横坐标是等差数列的话，则可以 $O(n)$ 计算出分母

例题：如何优雅地求和

有一个多项式函数 $f(x)$，最高次幂为 x^m，定义变换 Q:

$$Q(f,n,x)=\sum_{k=0}^{n}f(k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

现在给定函数 f 和数字 n, x，求 Q(f,n,x) mod 998244353

$n\leqslant 10^9, m\leqslant 2*10^4$

tip: 可以发现 Q(f) 是关于 n 的 m 次函数

例题：如何优雅地求和

有一个多项式函数 $f(x)$，最高次幂为 x^m，定义变换 Q:

$$Q(f,n,x)=\sum_{k=0}^{n} f(k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

现在给定函数 f 和数字 n, x，求 Q(f,n,x) mod 998244353

$n \leqslant 10^9, m \leqslant 2*10^4$

tip: 可以发现 Q(f) 是关于 n 的 m 次函数

先求出 Q(f,0,x),Q(f,1,x),...,Q(f,m,x)

然后插值即可求出 Q(f,n,x)

$O(m^2)$ 卡卡常就能过了

生成函数的定义

对于一个数列 $a_0, a_1, ..., a_n$

称函数 $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 是它的生成函数

生成函数的定义

对于一个数列 $a_0, a_1, ..., a_n$

称函数 $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 是它的生成函数

那生成函数有什么用？

例题：[BZOJ3028] 食物

小明要去买吃的，每种食物的个数限制如下：

汉堡：偶数个

可乐：0 个或 1 个

鸡腿：0 个，1 个或 2 个

蜜桃：奇数个

鸡块：4 的倍数个

包子：0 个，1 个，2 个或 3 个

土豆：不超过一个

面包：3 的倍数个

求恰好买 n 个的方案数

例题：[BZOJ3028] 食物

小明要去买吃的，每种食物的个数限制如下：

汉堡：偶数个

可乐：0 个或 1 个

鸡腿：0 个，1 个或 2 个

蜜桃：奇数个

鸡块：4 的倍数个

包子：0 个，1 个，2 个或 3 个

土豆：不超过一个

面包：3 的倍数个

求恰好买 n 个的方案数

以汉堡为例

设 a_i 表示买 i 个汉堡的方案数

则 a 的生成函数 $A(x) = x^0 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$

例题：[BZOJ3028] 食物

小明要去买吃的，每种食物的个数限制如下：

汉堡：	偶数个	$x^0 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$
可乐：	0 个或 1 个	$x^0 + x^1 = \frac{1-x^2}{1-x}$
鸡腿：	0 个，1 个或 2 个	$x^0 + x^1 + x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$
蜜桃：	奇数个	$x^1 + x^3 + x^5 + \ldots = \frac{x}{1-x^2}$
鸡块：	4 的倍数个	$x^0 + x^4 + x^8 + \ldots = \frac{1}{1-x^4}$
包子：	0 个，1 个，2 个或 3 个	$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$
土豆：	不超过一个	$x^0 + x^1 = \frac{1-x^2}{1-x}$
面包：	3 的倍数个	$x^0 + x^3 + x^6 + \ldots = \frac{1}{1-x^3}$

求恰好买 n 个的方案数

以汉堡为例

设 a_i 表示买 i 个汉堡的方案数

则 a 的生成函数 $A(x) = x^0 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$

同理得到其他食物的生成函数

例题：[BZOJ3028] 食物

汉堡：偶数个	$x^0+x^2+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x^2}$
可乐：0 个或 1 个	$x^0+x^1=\frac{1-x^2}{1-x}$
鸡腿：0 个，1 个或 2 个	$x^0+x^1+x^2=\frac{1-x^3}{1-x}$
蜜桃：奇数个	$x^1+x^3+x^5+\ldots=\frac{x}{1-x^2}$
鸡块：4 的倍数个	$x^0+x^4+x^8+\ldots=\frac{1}{1-x^4}$
包子：0 个，1 个，2 个或 3 个	$x^0+x^1+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}$
土豆：不超过一个	$x^0+x^1=\frac{1-x^2}{1-x}$
面包：3 的倍数个	$x^0+x^3+x^6+\ldots=\frac{1}{1-x^3}$

把这些式子都乘起来，思考每一项系数的意义

例题：[BZOJ3028] 食物

汉堡：偶数个	$x^0+x^2+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x^2}$
可乐：0 个或 1 个	$x^0+x^1=\frac{1-x^2}{1-x}$
鸡腿：0 个，1 个或 2 个	$x^0+x^1+x^2=\frac{1-x^3}{1-x}$
蜜桃：奇数个	$x^1+x^3+x^5+\ldots=\frac{x}{1-x^2}$
鸡块：4 的倍数个	$x^0+x^4+x^8+\ldots=\frac{1}{1-x^4}$
包子：0 个，1 个，2 个或 3 个	$x^0+x^1+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}$
土豆：不超过一个	$x^0+x^1=\frac{1-x^2}{1-x}$
面包：3 的倍数个	$x^0+x^3+x^6+\ldots=\frac{1}{1-x^3}$

把这些式子都乘起来，思考每一项系数的意义

x^n 的系数就代表买 n 个的方案数

例题：[BZOJ3028] 食物

汉堡：偶数个	$x^0+x^2+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x^2}$
可乐：0 个或 1 个	$x^0+x^1=\frac{1-x^2}{1-x}$
鸡腿：0 个，1 个或 2 个	$x^0+x^1+x^2=\frac{1-x^3}{1-x}$
蜜桃：奇数个	$x^1+x^3+x^5+\ldots=\frac{x}{1-x^2}$
鸡块：4 的倍数个	$x^0+x^4+x^8+\ldots=\frac{1}{1-x^4}$
包子：0 个，1 个，2 个或 3 个	$x^0+x^1+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}$
土豆：不超过一个	$x^0+x^1=\frac{1-x^2}{1-x}$
面包：3 的倍数个	$x^0+x^3+x^6+\ldots=\frac{1}{1-x^3}$

把这些式子都乘起来，思考每一项系数的意义

x^n 的系数就代表买 n 个的方案数

发现全乘起来之后等于 $\frac{x}{(1-x)^4}$

需要转换成正常的系数形式

通过广义二项式定理可知 x^n 的系数是 $\binom{n+2}{3}$

生成函数与斐波那契数列

设斐波那契数列为 f

$f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, \ldots$

设 f 的生成函数为 F(x)

生成函数与斐波那契数列

设斐波那契数列为 f

$f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, ...$

设 f 的生成函数为 F(x)

因为 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

所以 $F(x) = xF(x) + x^2F(x) + 1$

为什么？

生成函数与斐波那契数列

设斐波那契数列为 f

$f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, ...$

设 f 的生成函数为 F(x)

因为 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

所以 $F(x) = xF(x) + x^2 F(x) + 1$

为什么？

$$F(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + ...$$

$$xF(x) + x^2 F(x) + 1$$

$$= (x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + ...) + (x^2 + x^3 + 2x^4 + ...) + 1$$

$$= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + ...$$

生成函数与斐波那契数列

$$F(x) = xF(x) + x^2F(x) + 1$$
$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$